Iornament – Ornamenten met symmetrie

Fien Aelter, Liesje Knaepen en Kristien Vanhuyse, studenten SLO wiskunde KU Leuven

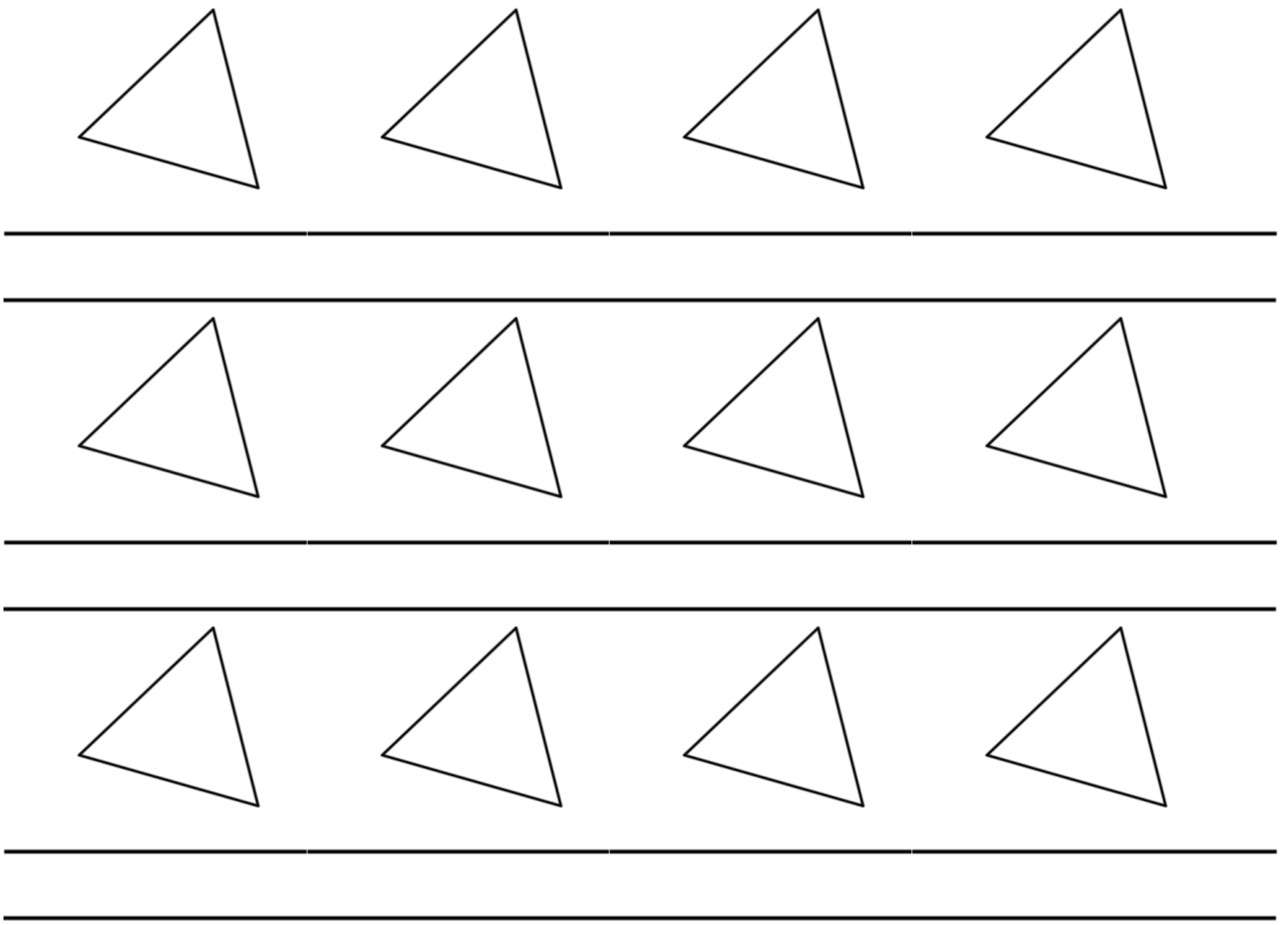
Werkblad vooraf met begeleidende tekst en oplossingen

Dit werklad is een voorbereiding bij ‘Iornament’, een onderdeel van de tentoonstelling ‘Imaginary’.

Op de tentoonstelling kan je werken met de software ‘Iornament’, waarbij gemakkelijk symmetrische patronen getekend kunnen worden in één van de 17 symmetriegroepen van de Euclidische ruimte. In deze werktekst beginnen we met een korte herhaling van symmetrieën. Vervolgens leer je wat symmetriegroepen zijn en hoe je deze kan bepalen. Om je helemaal voor te bereiden op de tentoonstelling sluit dit werkblad af met enkele toepassingen.

1. Symmetrieën (herhaling)

We starten met het zoeken naar symmetrieën in een regelmatige driehoek. Een symmetrie van een figuur is een isometrische[1] transformatie die de figuur op zichzelf afbeeldt. Dit betekent dat een figuur na het toepassen van ervan als geheel samenvalt met zijn beeld. Merk hierbij op dat dit niet betekent dat elk punt op zichzelf afgebeeld wordt, maar wel dat het beeld en het origineel uit dezelfde puntenverzameling bestaan. Zoek nu zelf zoveel mogelijk symmetrieën en benoem deze. (Het aantal figuren komt niet noodzakelijk overeen met het aantal te vinden symmetrieën.)



[1] Dit wil zeggen dat de afstand tussen twee punten niet veranderd wordt door de transformatie.

Ook in het dagelijkse leven komen we vaak symmetrische figuren tegen. Zoek in het volgende verkeersbord de verschillende symmetrieën.
(Het aantal figuren komt niet noodzakelijk overeen met het aantal te vinden symmetrieën.)

Samenvatting

Figuren kunnen op verschillende manieren symmetrisch zijn. Welke drie soorten symmetrieën heb je gevonden in de bovenstaande figuren?

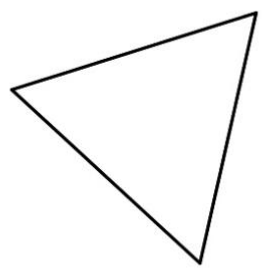
Opmerking: Als je over +120° graden draait, draai je in tegenwijzerzin. Als je draait over -120°, draai je in wijzerzin.

Symmetrieën kunnen ook samengesteld worden. De samengestelde van twee symmetrieën van een figuur is opnieuw een symmetrie van die figuur. Hieronder lichten we kort toe hoe dit in zijn werk gaat. Stel dat we twee symmetrieën hebben die we r en s noemen. Als we deze twee samenstellen in de volgorde waarbij eerst r en dan s toegepast wordt, bepalen we eerst het beeld dat verkregen wordt door toepassing van r. Daarna bepalen we het beeld van deze nieuwe figuur door toepassing van s. Dit geeft een nieuwe transformatie, namelijk de samengestelde van r en s. Dit wordt met genoteerd met $s \circ r$ en lezen we als s na r.

2. Symmetriegroep

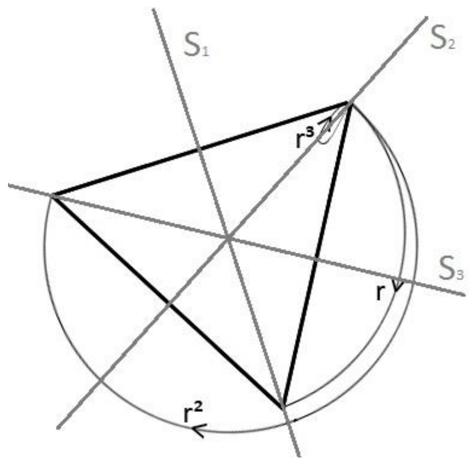
Gebruik makend van de herhaalde begrippen zullen we nu een korte inleiding geven over symmetriegroepen. We bespreken enkel de concepten die we nodig hebben om de opdrachten bij het programma op de tentoonstelling te kunnen oplossen.

We gaan verder met het bestuderen van de onderstaande driehoek.



Bij de herhaling van symmetrieën heb je reeds alle symmetrieën van de figuur gezocht. Benoem nu die transformaties met de volgende notaties:

- Draaiing/rotaties met *r*, r^2 (2 maal uitvoeren van r), r^3 (3 maal uitvoeren van r)
- Spiegelassen met S_1, S_2, S_3



De verzameling van alle symmetrieën van deze driehoek is gelijk aan $\{r^m, S_i \mid m \in \mathbb{Z}\,;\ i = 1,2,3\}$, waarbij *r* de rotatie over 120° is.

Over welke hoek wordt er gedraaid bij de rotatie r^2? Verklaar je uitkomst met behulp van de samenstelling van symmetrieën.

Pas nu de driehoek zo aan dat de figuur niet meer lijnsymmetrisch is, maar de draaisymmetrie behouden blijft. Duid op deze nieuwe figuur de overblijvende symmetrieën met de correcte notaties aan. Geef tot slot ook de verzameling van alle symmetrieën.

Vanaf nu werken we verder met deze figuur en zijn bijbehorende verzameling van symmetrieën.

Wat gebeurt er als je een draaiing met draaihoek van 240° graden twee keer na elkaar uitvoert? Geef aan met welke symmetrie uit de verzameling deze samenstelling overeen komt.
Tip: Onthoud goed de beginpositie van elk hoekpunt.

Neem nu willekeurig twee elementen uit de verzameling van symmetrieën van de figuur. Stel deze samen en bekijk of het resultaat opnieuw in de verzameling van symmetrieën zit.

Bekijk nu de keuze van je buur en controleer zijn / haar antwoord.

Zit er in de verzameling van symmetrieën een transformatie die niets verandert aan de positie van de figuur? Zo'n symmetrie noemen we de identieke transformatie en noteren we met ***I***.

Welke transformatie moet uitgevoerd worden zodat, na een draaiing met draaihoek van 120°, de figuur terug in zijn oorspronkelijke positie komt te liggen? Deze transformatie noemen we de <u>inverse transformatie</u> van de draaiing over een hoek van 120°.

Neem nu een willekeurig element uit de verzameling van symmetrieën. Ga na of er voor dit element een inverse in de verzameling te vinden is.

Bekijk nu de keuze van je buur en controleer zijn / haar antwoord.

De verzameling van alle symmetrieën van deze figuur vormt een groep voor de samenstelling.
Dit wil zeggen dat:

(1) de samengestelde van twee symmetrieën uit die verzameling er steeds bij is;
(2) de identieke er ook bij is en
(3) de inverse van een symmetrie uit die verzameling er steeds in zit.

Definitie 'Symmetriegroep'

De verzameling van alle symmetrieën van een bepaalde figuur wordt de <u>symmetriegroep</u> van die figuur genoemd.

We stellen nu een tabel op, die weergeeft wat het resultaat is van de samenstelling van elk tweetal symmetrieën uit de symmetriegroep. Deze tabel noemen we een <u>Cayleytabel</u>. Hieronder vind je de Cayleytabel van de figuur waarvan we net de symmetriegroep bepaalden. In de eerste rij en de eerste kolom schrijf je de verschillende elementen van de groep op (in dezelfde volgorde). Vervolgens stel je elk element van de linkerkolom samen met elk element van de bovenste rij. Op die manier wordt het volledige rooster ingevuld. Zo bekom je bijvoorbeeld dat $r \circ I = r$ in het vakje op de tweede rij en in de eerste kolom van het witte gedeelte van de tabel.

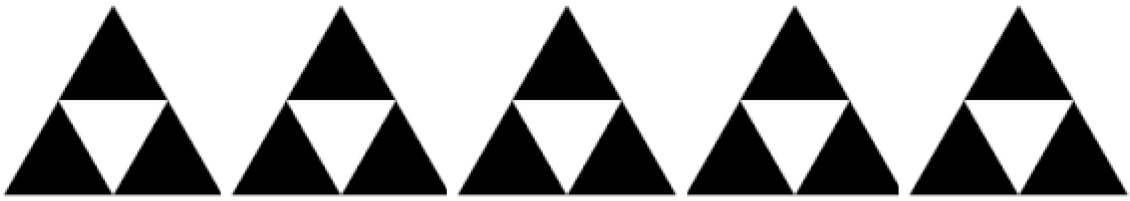
$\circ$	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

Bekijk onderstaande figuur. Welke elementen bevat de symmetriegroep?

Vul voor deze verzameling de Cayleytabel in.

∘			

Teken de symmetrieën van de onderstaande figuur.



Welke elementen bevat de symmetriegroep?

In deze figuur vind je meer elementen voor de symmetriegroep dan bij de voorgaande figuur. De Cayleytabel zal dus een uitgebreidere tabel zijn.

Zo zoeken we bijvoorbeeld het element uit de symmetriegroep waarmee de samenstelling $r \circ S_1$ overeen komt. De samenstelling $r \circ S_1$ spiegelt de figuur eerst ten opzichte van de rechte s_1 en draait deze figuur dan over 120°. Als je voor elk hoekpunt zorgvuldig nagaat waar het onder deze twee transformaties naar toegaat, kom je tot de vaststelling dat deze samenstelling overeenkomt met het uitvoeren van S_3.

Vul nu de Cayleytabel verder aan.

$\circ$	***I***	***r***	***r^2***	***S_1***	***S_2***	***S_3***
I						
r				***S_3***		
r^2						
S_1						
S_2						
S_3						

3. Strookpatronen

In de onderstaande figuur kunnen we, op de identieke transformatie na, geen van de symmetrieën uit het voorgaande puntje vinden.

Welk nieuw type symmetrie is er aanwezig in deze figuur, waarbij we veronderstellen dat de figuur naar rechts en links oneindig doorloopt?

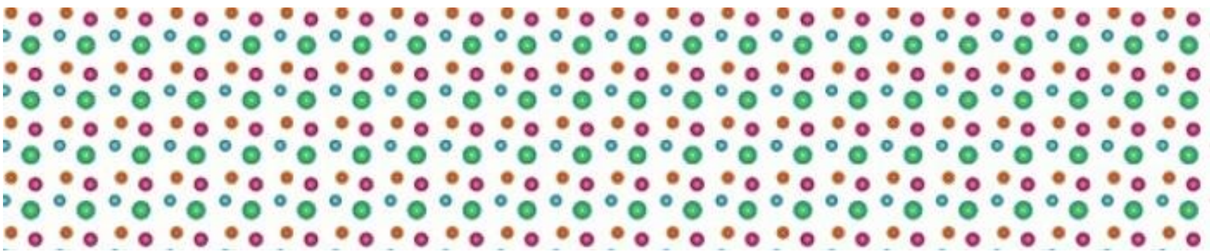
Deze nieuwe symmetrie noemen we een translatie of verschuiving. Duid enkele van deze translaties aan op bovenstaande figuur. Hoeveel translaties zijn er?

Via het verschuiven van eenzelfde figuur, zoals in het voorbeeld hierboven, verkrijgen we een oneindige rij van figuren, die we een strookpatroon noemen.

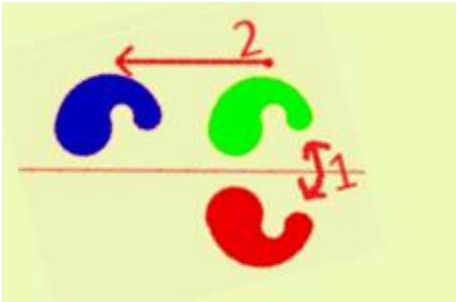
Teken enkele symmetrieën in de onderstaande figuren. Houd bij het bepalen ervan rekening met de verschillende grijswaarden. Opnieuw veronderstellen we dat de figuur horizontaal oneindig doorloopt. Wat is de symmetriegroep van de figuur?

Figuur 1

Figuur 2



Naast de hiervoor gevonden symmetrieën is er nog een laatste type transformatie dat in een symmetriegroep kan voorkomen, namelijk de schuifspiegeling. De werking wordt aangegeven in onderstaande figuur.



Het komt er op neer dat een figuur eerst gespiegeld wordt rond een as en vervolgens een translatie evenwijdig met de spiegelas ondergaat.

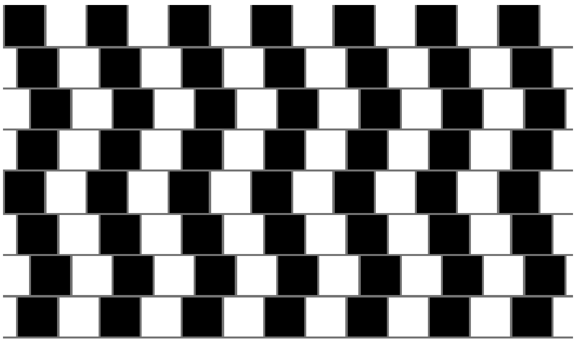
Geef de symmetrieën van onderstaande figuur, waarbij we veronderstellen dat ze naar links en rechts oneindig doorloopt.

Geef de symmetrieën van onderstaande figuur, waarbij we veronderstellen dat ze naar links en rechts oneindig doorloopt.

4. Behangpatronen

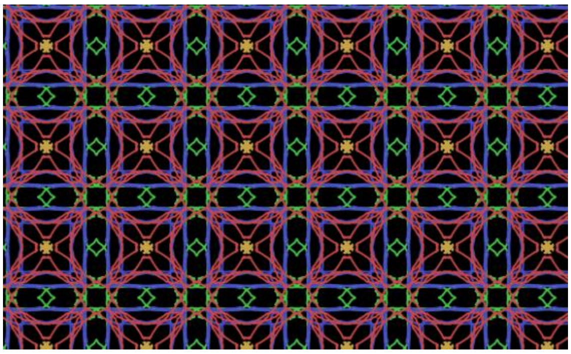
Wanneer strookpatronen zowel horizontaal als verticaal doorlopen, spreken we van behangpatronen of vlakvullingen. We gaan verder op dit onderwerp in tijdens de tentoonstelling en bekijken hieronder alvast een voorbeeld.

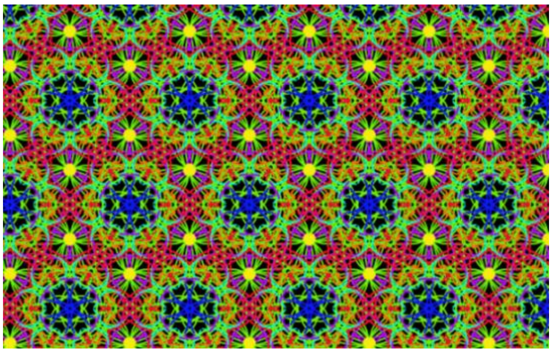
Teken de symmetrieën in de onderstaande figuur. Ditmaal veronderstellen we dat de figuur zowel horizontaal als verticaal oneindig doorloopt. Wat is de symmetriegroep van de figuur?



Werkblad tentoonstelling met begeleidende tekst en oplossingen

Aan de hand van het programma Iornament kunnen vlakvullingen gecreëerd worden. Maak kennis met het programma door enkele figuren te tekenen en de verschillende knoppen uit te testen. Maak hiervoor gebruik van de onderstaande tips. Je zal merken dat je op deze manier snel mooie en symmetrische behangpatronen krijgt. Hieronder vind je twee voorbeelden.





Enkele tips hierbij:

- Met de knop ‘pm’ zorg je ervoor dat de zwarte vierhoek de vorm van een vierkant aanneemt.
- Je kan deze vierkanten zichtbaar maken in het grote vlak door de eerste knop op de vijfde rij aan te klikken.
- Klik op ‘p1’ en teken een lijnstuk in het grote vlak. Bekijk hierbij welke symmetrie in de figuur zichtbaar wordt. Kan je ook de symmetriegroep achterhalen?

- Wat gebeurt er wanneer je nu op ‘pm’ drukt? Kan je ook nu de symmetriegroep achterhalen?

- Bekijk wat er gebeurt als je ‘p2’ toepast. Wat is de symmetriegroep bij deze transformatie?

- Bekijk wat er gebeurt als je ‘p4’ toepast. Wat is de symmetriegroep bij deze transformatie?

- Waarin verschilt ‘p3’ ten opzichte van zowel ‘p2’ als ‘p4’?
  (Tip: Maak hiervoor gebruik van de derde knop op de vijfde rij. Deze toont de symmetrieassen en de rotatiecentra.)

- Druk nu op de prullenbak (vijfde knop van de vijfde rij) om je afbeelding te wissen.
- Selecteer opnieuw ‘p1’ en teken vervolgens maximum twee lijnstukken (eventueel in twee verschillende kleuren). Selecteer nu een andere transformatie zonder de afbeelding te wissen en neem een foto (met je smartphone, …). Welke symmetrieën vind je in dit behangpatroon?

- Vormt de verzameling van al deze symmetrieën een symmetriegroep? Controleer daarvoor het volgende:
  - Zit de samenstelling van twee symmetrieën terug in de groep?
  - Zit het neutraal element in de groep en wat is dit element?
  - Zit de inverse van elke symmetrie in de groep?

- Maak zelf een behangpatroon en zoek de symmetrieën die er in voorkomen. Kan je ook de symmetriegroep achterhalen? Maak een foto van je creatie.