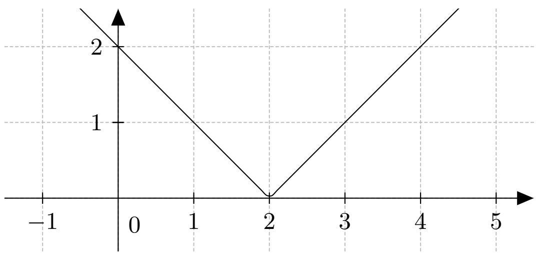
Imaginary - singulariteiten

Gommaar Maes en Tania Van Damme

SLO Wiskunde - Universiteit Gent en Atheneum Mariakerke

Inleiding

Een regulier punt van een vlakke kromme is een punt waar de kromme vloeiend doorloopt. Elk punt van een vlakke kromme dat niet regulier is, is singulier.
Bv. voor onderstaande kromme is het punt $(2, 0)$ een singulier punt. Knikpunten zijn voorbeelden van singuliere punten van een vlakke kromme.



Deze intuïtieve definitie voor singuliere punten van een vlakke kromme wordt uitgebreid voor oppervlakken in de ruimte als volgt.

Singuliere punten of **singulariteiten** kunnen visueel worden herkend: daar waar het oppervlak niet vloeiend vlak of golvend doorloopt. Het zijn punten waarin het oppervlak een scherp uiteinde heeft of gevouwd is.

Opdrachten

1. Zoek de poster van de Citrus. Omschrijf waar de singuliere punten van dit oppervlak zich bevinden.

2. Zoek de poster van de Tol. Omschrijf waar de singuliere punten van dit oppervlak zich bevinden.

3. Raadpleeg één van de schermen waarop het programma SURFER beschikbaar is. Teken het oppervlak met vergelijking $x^2 = y^2z^2$ (dit oppervlak noemt Hemel en Hel). Opgelet in SURFER moeten alle vergelijkingen herleid op 0 worden ingevoerd. Vergeet ook niet het vermenigvuldigingsteken te gebruiken.
   Omschrijf waar de singuliere punten van dit oppervlak zich bevinden.

4. Zoek twee posters met oppervlakken die slechts één singulier punt hebben.

5. Zoek twee posters met oppervlakken waarvan alle singuliere punten op één rechte liggen.

Probeemstelling

Hoe vind je singuliere punten als je van het oppervlak enkel de vergelijking kent, maar het oppervlak niet kan zien of aanraken?

Wiskundig worden singuliere punten als volgt gedefinieerd.

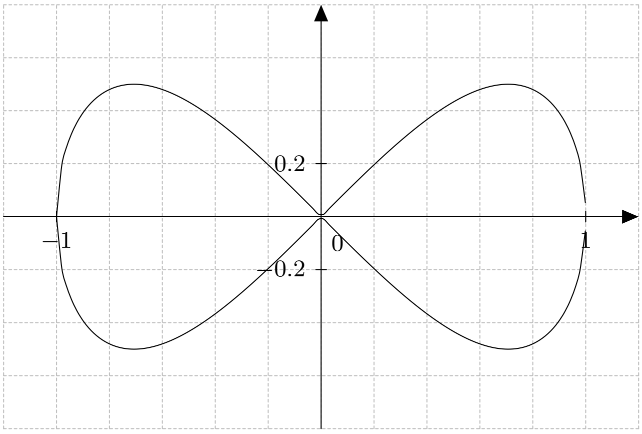
Singuliere punten worden gedefinieerd als de verzameling punten van het oppervlak waar de partiële afgeleiden van de vergelijking nul zijn.

Kennis van wiskundige definities is nodig om enkel gebruikmakend van een blad papier en een potlood singuliere punten te vinden.

Enkele definities

1. Een **algebraïsch oppervlak** is de verzameling punten waarvan de coördinaat voldoet aan een veeltermvergelijking in één of meerdere veranderlijken.

2. Als de raaklijn in een punt van een kromme aan die kromme niet éénduidig bepaald is, dan is dit punt een **singulier** punt van de kromme.
   Bv. voor de vlakke kromme met vergelijking $y^2 = x^2 - x^4$ is het punt $O(0,0)$ een singulier punt.



3. **Partiële afgeleide** van een functie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$

   We kennen volgende definitie uit de lessen analyse: een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is afleidbaar op voorwaarde dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

   We beschouwen nu een functie in drie veranderlijken i.p.v. in één veranderlijke:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

   Hierin zijn x, y, z de drie veranderlijken. We kunnen enkel aan x veranderlijke waarden toekennen, en y en z als constanten beschouwen. Dan krijgen we een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R} : x \mapsto f(x,y,z)$ die we de partiële functie van f naar x noemen.
   Deze partiële functie is afleidbaar of differentieerbaar in x op voorwaarde dat

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x+h_1,y,z) - f(x,y,z)}{h_1} \in \mathbb{R}$$

   Dit reëel getal, de afgeleide van de partiële functie van f naar x, noemen we de partiële afgeleide van f naar x in het punt (x,y,z).
   Notaties: $f'_x(x,y,z)$; $D_x f(x,y,z)$; $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$
   Analoog

- We beschouwen enkel y als veranderlijke en houden x en z constant. We definiëren, indien de vermelde limiet tot $\mathbb{R}$ behoort, als volgt de partiële afgeleide van f naar y in het punt (x, y, z):

$$f'_y(x, y, z) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x, y + h_2, z) - f(x, y, z)}{h_2}$$

- We beschouwen enkel z als veranderlijke en houden x en y constant. We definiëren, indien de vermelde limiet tot $\mathbb{R}$ behoort, als volgt de partiële afgeleide van f naar z in het punt (x, y, z):

$$f'_z(x, y, z) = \lim_{h_3 \to 0} \frac{f(x, y, z + h_3) - f(x, y, z)}{h_3}$$

Opmerking: deze definities kunnen veralgemeend worden voor functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$.

Voorbeeld: beschouw de vergelijking van de *Citrus*: $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$. Dit oppervlak wordt dus beschreven door de functie

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^3(1-y)^3$$

De partiële afgeleiden naar respectievelijk x, y en z zijn:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = -3y^2(1-y)^3 - 3y^3(1-y)^2(-1) = 3y^2(1-y)^2(-1+y+y) = 3y^2(1-y)^2(2y-1)$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 2z$$

Opdrachten

Neem een blad papier en schrijfgerief om de gevraagde partiële afgeleiden te bepalen.

(a) Beschouw het functievoorschrift van Vis-à-Vis:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + y^4 + z^3 - x^3 - z^4$$

Bepaal de partiële afgeleiden van f naar x, y en z.

(b) Beschouw het functievoorschrift van de Duif:

$$f(x, y, z) = 256z^3 - 128x^2z^2 + 16x^4z + 144xy^2z - 4x^3y^2 - 27y^4$$

Bepaal de partiële afgeleiden van f naar x, y en z.

(c) Beschouw het functievoorschrift van Nepali:

$$f(x, y, z) = (xy - z^3 - 1)^2 - (1 - x^2 - y^2)^3$$

Bepaal de partiële afgeleiden van f naar x, y en z.

Controleer de gevonden partiële afgeleiden met de oplossing vermeld achteraan deze bundel.

4. **Raaklijnen aan vlakke krommen en partiële afgeleiden**

   We noteren de vergelijking van een vlakke kromme $y = f(x)$ in de vorm

   $$F(x,y) = f(x) - y$$

   De partiële afgeleiden van F zijn dan:

   $$\frac{\partial F(x,y)}{x} = f'(x)$$

   en

   $$\frac{\partial F(x,y)}{y} = -1$$

   De vergelijking van de raaklijn aan deze kromme in het punt $P(x_0, y_0)$ is

   $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

   Deze vergelijking kunnen we herschrijven als volgt:

   $$f'(x_0)(x - x_0) - 1.(y - y_0) = 0$$

   Omdat $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} = f'(x_0)$ en $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = -1$ kunnen we de vergelijking van de raaklijn in $P(x_0, y_0)$ herschrijven als:

   $$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0$$

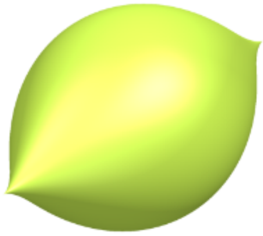
   We zien dat de raaklijn aan een vlakke kromme niet bepaald is als beide partiële afgeleiden nul zijn.

5. Nu de link in het vlak is gelegd tussen singuliere punten en raaklijnen enerzijds en tussen raaklijnen en partiële afgeleiden anderzijds, komen we tot de wiskundige definitie van singuliere punten van een algebraïsch oppervlak in de ruimte:

   een singulier punt van een algebraïsch oppervlak in de ruimte gegeven door een veelterm $f(x,y,z)$ is een punt (x_0, y_0, z_0) waarvoor alle partiële afgeleiden van f in dit punt nul zijn.

   Voorbeeld: we vinden de singuliere punten van de Citrus als oplossing van het stelsel

   $$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2(1-y)^2(2y-1) = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$



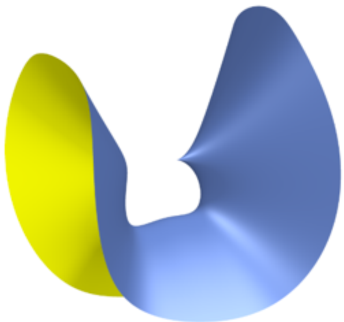
We controleren of deze 3 punten tot het oppervlak van de Citrus behoren, door de coördinaten in te vullen in de vergelijking van de Citrus $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$:

$$(0,0,0) : 0^2 + 0^2 = 0^3(1-0)^3$$
$$(0,1,0) : 0^2 + 0^2 = 1^3(1-1)^3$$
$$(0,\frac{1}{2},0) : 0^2 + 0^2 \neq (\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{2})^3$$

Conclusie: $(0,0,0)$ en $(0,1,0)$ zijn de singuliere punten van de Citrus met vergelijking $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$. Ter informatie: het punt $(0, \frac{1}{2}, 0)$ is het middelpunt van de Citrus.

Eindopdrachten

1. Bepaal door berekening de coördinaat van het singulier punt van Vis-à-Vis (vergelijking: $x^2 + y^2 + y^4 + z^3 = x^3 + z^4$).



2. Experimenteer in Surfer met de vergelijking van Vis-à-Vis zodat de partiële afgeleide van de veelterm naar x enkel 0 als nulwaarde heeft, en waardoor de partiële afgeleide naar y precies twee verschillende nulwaarden heeft die ook de enige nulwaarden zijn van de partiële afgeleide naar z.
   Experimenteer tot je minstens twee singuliere punten ziet opduiken. Bepaal de coördinaten van de nu opgemerkte singuliere punten.

3. Zoek de poster van de Kelk. Noteer de vergelijking. Bepaal door berekening aan de hand van de vergelijking van de Kelk de singuliere punten van dit oppervlak. Geef de meetkundige plaats van de singuliere punten.

4. Controleer door berekening je eerder antwoord op de vraag naar de ligging van de singuliere punten van de Tol. De vergelijking van de Tol is: $60(x^2 + y^2)z^4 = (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3$. Bepaal de coördinaten en de meetkundige plaats van de singuliere punten.

5. Uit je antwoord op de vorige vraag kan je concluderen dat de Tol kan ingeschreven worden in een bol, zodanig dat de singuliere punten van de Tol tot het boloppervlak behoren. Geef de vergelijking van het aan de Tol omgeschreven boloppervlak.

6. Ga naar één van de schermen waarop het programma Surfer beschikbaar is en voer de vergelijking van de Tol in: $60(x^2 + y^2)z^4 - (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3 = 0$. Plaats in Surfer de veelterm in het linkerlid van de vergelijking tussen haakjes en vermenigvuldig met de veelterm uit de vergelijking herleid op 0 van de omgeschreven bol. Op deze manier wordt ook het aan de tol omgeschreven boloppervlak getoond. Door in te zoomen lijkt de bol zich te openen en komt de Tol te voorschijn.

7. Verander in de vergelijking van de Tol het getal 60 in andere waarden. Wat stel je vast?

8. Pas de vergelijking van de Tol aan zodat de Tol kan ingeschreven worden in een bol met straal de helft van daarnet.

Oplossingen opdrachten op partieel afleiden

Oplossing opdracht (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(2-3x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1+2y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = z^2(3-4z)$$

Oplossing opdracht (b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -256xz^2 + 64x^3z + 144y^2z - 12x^2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 288xyz - 8x^3y - 108y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 768z^2 - 256x^2z + 16x^4 + 144xy^2$$

Oplossing opdracht (c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy - z^3 - 1) + 6x(1 - x^2 - y^2)^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy - z^3 - 1) + 6y(1 - x^2 - y^2)^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -6z^2(xy - z^3 - 1)$$